Т. П. Лукашенко

Москва, lukashenko@mail.ru

О СХОДИМОСТИ ПОЧТИ ВСЮДУ РЕКУРСИВНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ ПО ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИМ ФУНКЦИЯМ МНОЖЕСТВ

Пусть χ_k^m, где $m,\ k \in \mathbb{N}$, — нормированные в $L^2(\Omega)$ характеристические фукции измеримых множеств E_k^m конечной строго положительной меры, множества E_k^m и E_l^m при $k \neq l$ не пересекаются, а если $E_k^m \cap E_l^n \neq \varnothing$ и $m < n$, то $E_k^m \supset E_l^n$.

Определение. Если функция f интегрируема по Лебегу на любых измеримых множествах конечной меры, то определим ее *рекурсивное разложение*:

1) $r_0 = f$;

2) если для натурального m заданы остаток приближения r_{m-1} и система $\{\chi_k^m\}_k$, то полагаем

$$\widehat{f}_k^m = \int\limits_{\Omega} r_{m-1}\chi_k^m \, d\mu = \frac{1}{\sqrt{\mu(E_k^m)}} \int\limits_{E_k^m} r_{m-1} \, d\mu$$

для всех допустимых k и полагаем $r_m = r_{m-1} - \sum\limits_k \widehat{f}_k^m \chi_k^m$. Коэффициенты $\widehat{f}_k^m$ — *рекурсивные коэффициенты Фурье* функции f по цепочке систем $\{\chi_k^m\}_k$, $m \in \mathbb{N}$, а ряд $\sum\limits_m \sum\limits_k \widehat{f}_k^m \varphi_k^m$ — *рекурсивный ряд Фурье* функции f.

Определение. Последовательность систем множеств $\{E_k^m\}_k$, $m \in \mathbb{N}$, обладает свойством *аппроксимации*, если для любого измеримого множества D конечной меры и любого $\varepsilon > 0$ найдется такой конечный набор множеств $E_{k_p}^m$,

$p = 1, \ldots, P$, из одной системы, что $\mu\left(D \triangle \bigsqcup_{p=1}^{P} E_{k_p}^m\right) < \varepsilon$, где $\triangle$ обозначает симметрическую разность множеств.

Теорема. *Если последовательность систем множеств* $\{E_k^m\}_k$, $m \in \mathbb{N}$, *обладает свойством аппроксимации и если для всех натуральных* m *любое множество* E_k^m *является объединением множеств* $E_j^{m+1} \subset E_k^m$, *то для любой функции* $f(x) \in L^p(\Omega)$, $1 \leqslant p < \infty$, *частичные суммы рекурсивного ряда Фурье по системам* $\{\chi_k^m\}_k$

$$S_n(f;x) = \sum_{m=1}^{n} \sum_{k} \widehat{f}_k^m \chi_k^m(x)$$

стремятся к функции $f(x)$ *по метрике пространства* $L^p(\Omega)$ *и почти всюду на* Ω. *Мажоранта частичных сумм удовлетворяет оценке слабого типа*

$$\mu\left\{x \in \Omega : \sup_n |S_n(f;x)| = \right.$$
$$\left. = \sup_n \left| \sum_{m=1}^{n} \sum_{k} \widehat{f}_k^m \varphi_k^m(x) \right| > \lambda \right\} < \frac{1}{\lambda^p} \|f\|_p^p, \quad \lambda > 0.$$

Подробнее о рекурсивных разложениях и доказательство сходимости частичных сумм по метрике пространства $L^p(\Omega)$ см. в [1].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 08-01-00669).

ЛИТЕРАТУРА

1. Лукашенко Т. П., Садовничий В. А. *О рекурсивных разложениях по цепочке систем* // Докл. РАН. – 2009. – Т. 425. – № 6. – С. 1–6.